

# 細い直線的な弾性体の固有振動

Albert RODRÍGUEZ MULET (北海道大学大学院理学院数学専攻博士課程)\*

以下の主結果は神保秀一氏(北大理)との共同研究による。

## 1. 序

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  を領域とする。  $\Omega$  の形をしている弾性体における振動を考える。  $u = (u_1, u_2, u_3) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  を振動に対応する変位ベクトル場とする。  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  を弾性体の材質に依存する実定数とする。  $\lambda_1$  は物体の伸縮反発を表し、  $\lambda_2$  は物体が振られるときの反発に対応する量である。 次にテンソル  $e(u)$  と  $\sigma(u)$  を以下のように定義する。

$$e(u) = (e_{ij}(u))_{1 \leq i, j \leq 3} = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq 3},$$
$$\sigma(u) = \lambda_1 \operatorname{tr}(e(u)) \operatorname{Id}_3 + 2\lambda_2 e(u).$$

ここで、  $\operatorname{tr}$  は行列のトレースであり、  $\operatorname{Id}_3$  は 3 次の単位行列である。  $e(u)$  は線型歪みテンソル (*linearized strain tensor*) と呼び、  $\sigma(u)$  は一様等方的な弾性体の Hooke の法則による応力テンソル (*stress tensor*) である。 そして、 ラメ作用素は次のように定義する。

$$L[u] = \operatorname{div}(\sigma(u)), \quad \text{i.e.} \quad (L[u])_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u) \quad (1 \leq i, j \leq 3).$$

ラメ作用素は 2 階楕円型作用素であることを示すことができる。 このとき、弾性体における振動は下記の波動方程式で表すことができる。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L[u]. \quad (1)$$

ここで、  $\rho > 0$  は密度である。

これから、  $\rho = 1$  とし、振動は時間周期的振動であることを仮定する。 周期を  $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$  とおき、  $u(x, t) = e^{i\sqrt{\mu}t} v(x)$  とする。 すると、 (1) は固有値問題

$$L[v] + \mu v = 0 \quad (2)$$

となる。

弾性体については Ciarlet [1] には板の形にした弾性体の研究が載っている。 こういう形を解析すると、地球の表面における地震の研究に応用がある。 そして、更に正確に研究するために、地球の表面は平坦ではなく曲がっていると考えられる。 故に次の一歩として弾性体がシェルの形をしている時についても書いてある。

一方、建物における振動を調べるために、建物が板や棒で構成されていると考えられる (例えば Cioranescu-Saint Jean Paulin [2] を参照)。 そのため、柱の場合は Ciarlet 氏の研究と関連している。

他にも、Maz'ya-Nazarov-Plamenevskij [5] などにラメ作用素などを含む 2 階楕円型作用素領域変形問題の様々な境界条件の場合について書かれている。

\* e-mail: albertromu@math.sci.hokudai.ac.jp

本発表で扱う場合の準備を始める．先ず，小さいパラメータ  $\varepsilon > 0$  に依存する領域  $\Omega_\varepsilon$  を定式化する．そのために，集合  $S$ ， $s_1^{(+)}$ ， $s_1^{(-)}$ ， $s_2$  を

$$\begin{aligned} S &= \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1^2 + z_2^2 < 1, 0 < z_3 < l\}, \\ s_1^{(+)} &= \{(z_1, z_2, l) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1^2 + z_2^2 \leq 1\}, \\ s_1^{(-)} &= \{(z_1, z_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1^2 + z_2^2 \leq 1\}, \\ s_2 &= \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1^2 + z_2^2 = 1, 0 < z_3 < l\}. \end{aligned}$$

ここで， $l > 0$  は円柱の高さである．これから， $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を充分滑らかな微分同相写像とし，次の性質を満たすように取る．

- $F(z) = (F_1(z), F_2(z), z_3)$  ( $z = (z_1, z_2, z_3) \in S$ ).
- $F_i(0, 0, z_3) = 0$  ( $i = 1, 2, 0 \leq z_3 \leq l$ ).
- 任意の  $z \in S$  に対し  $F$  の Jacobian 行列式は正である．

$F^\varepsilon(z) = (\varepsilon F_1(z), \varepsilon F_2(z), z_3)$  と定め，次の集合を考える．

$$\Omega_\varepsilon = F^\varepsilon(S), \quad \Gamma_{1,\varepsilon}^{(+)} = F^\varepsilon(s_1^{(+)}), \quad \Gamma_{1,\varepsilon}^{(-)} = F^\varepsilon(s_1^{(-)}), \quad \Gamma_{2,\varepsilon} = F^\varepsilon(s_2).$$

$\Omega_\varepsilon$  が細い柱状の弾性体に相当する．

本講演では  $u : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  を変位ベクトル場とし， $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき，次の固有値問題の固有値や固有関数の漸近挙動を考える．

$$\begin{cases} L[u] + \mu u = \mathbf{0} & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ u = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_{1,\varepsilon}^{(+)} \cup \Gamma_{1,\varepsilon}^{(-)}, \\ \sigma(u) \nu = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_{2,\varepsilon}. \end{cases} \quad (3)$$

ここで， $\nu$  は  $\Gamma_{2,\varepsilon}$  上の外向き単位法線ベクトルである．こういう問題が工学の視点から研究されているが，厳密で数学的な研究は多くない．

## 2. 準備

主結果を述べるために，必要な準備をする．先ず， $B = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid z_1^2 + z_2^2 < 1\}$ ， $z' = (z_1, z_2)$ ， $dz' = dz_1 dz_2$  とし， $F$  の Jacobian 行列を  $J(z) = \left( \frac{\partial F_i}{\partial z_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 3}$  と書き，その行列式を  $J_*(z) = \det(J(z))$  とする．このとき，以下のように関数  $H$ ， $K_i$ ， $A_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq 2$ ) を定義する．

$$\begin{aligned} H &= H(z_3) = \int_B J_*(z', z_3) dz', & K_i &= K_i(z_3) = \int_B F_i(z', z_3) J_*(z', z_3) dz', \\ A_{ij} &= A_{ij}(z_3) = \int_B F_i(z', z_3) F_j(z', z_3) J_*(z', z_3) dz' & (z_3 \in [0, l]). \end{aligned}$$

そして， $Y = \frac{\lambda_2(3\lambda_1 + 2\lambda_2)}{\lambda_1 + \lambda_2}$  もおく．

**注意 2.1.** 行列  $(A_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  は (任意の  $0 \leq z_3 \leq l$ ) に対し) 正定値実対称行列となる．

更に，固有値問題 (3) はゼロ以上の実数列からなる固有値

$$0 \leq \mu_1(\varepsilon) \leq \mu_2(\varepsilon) \leq \cdots \leq \mu_k(\varepsilon) \leq \mu_{k+1}(\varepsilon) \leq \cdots$$

を持つことが知られている (Edmunds-Evans [4] などを参照)．

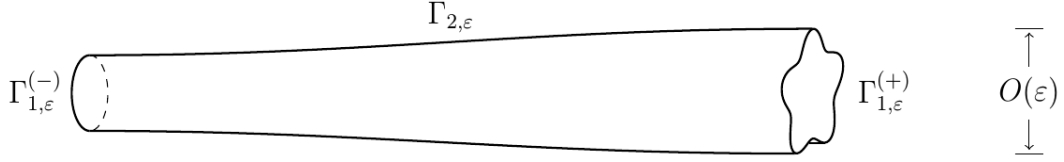


図 1:  $\Omega_\varepsilon$  の例

### 3. 主結果

これで、主結果を述べることができる。

**定理 3.1** (Both ends with Dirichlet B.C.).  $k \in \mathbb{N}$  に対し固有値問題 (3) の第  $k$  固有値を  $\mu_k(\varepsilon)$  とすると、以下が成り立つ。

a)  $\mu_k(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

b)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_k(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \Lambda_k.$$

但し、 $\Lambda_k$  は 4 階常微分作用素の固有値問題

$$\left\{ \begin{array}{l} Y \frac{d^2}{d\tau^2} \begin{pmatrix} A_{11}(\tau) & A_{12}(\tau) & -K_1(\tau) \\ A_{21}(\tau) & A_{22}(\tau) & -K_2(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2\eta_1}{d\tau^2} \\ \frac{d^2\eta_2}{d\tau^2} \\ \frac{d\eta_3}{d\tau} \end{pmatrix} = \Lambda H(\tau) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad (0 < \tau < l), \\ \frac{d}{d\tau} \left( H(\tau) \frac{d\eta_3}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left( K_1(\tau) \frac{d^2\eta_1}{d\tau^2} + K_2(\tau) \frac{d^2\eta_2}{d\tau^2} \right) \\ \eta_i(0) = \eta_i(l) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \\ \frac{d\eta_i}{d\tau}(0) = \frac{d\eta_i}{d\tau}(l) = 0 \quad (i = 1, 2), \end{array} \right.$$

の第  $k$  固有値である。

$\Omega_\varepsilon$  が半径  $\varepsilon$  の円柱の場合は橋本浩平氏の [6] で議論され、低周波の固有振動について研究された。この固有値問題における成果をより一般的な範囲で議論する。

**注意 3.1.** 前述の定理は  $\Omega_\varepsilon$  の両端が固定された場合である。一つの先端を固定し、もう一つの先端で Neumann 境界条件 ( $u = \mathbf{0}$  on  $\Gamma_{1,\varepsilon}^{(-)}$ ,  $\sigma(u)\nu = \mathbf{0}$  on  $\Gamma_{1,\varepsilon}^{(+)} \cup \Gamma_{2,\varepsilon}$ ) を考えるとき、類似な結果が得られる。具体的に、定理 3.1-a) と同様に固有値はまた  $O(\varepsilon) = \varepsilon^2$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$  であり、関数  $P_i = P_i(\tau)$  を  $P_i(\tau) = -K_i(\tau) \frac{d\eta_3}{d\tau} + A_{i1}(\tau) \frac{d^2\eta_1}{d\tau^2} + A_{i2}(\tau) \frac{d^2\eta_2}{d\tau^2}$  とおけば、b) の常微分方程式の境界条件が

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_i(0) = \frac{d\eta_i}{d\tau}(0) = 0, \quad \eta_3(0) = \frac{d\eta_3}{d\tau}(l) = 0, \\ P_i(l) = \frac{dP_i}{d\tau}(l) = 0 \end{array} \quad (i = 1, 2)$$

に変わる。

#### 4. 例

例として  $\Omega_\varepsilon$  を半径  $\varepsilon$  の円柱とする．この場合は  $F$  が単位関数であり，

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{22} &= \frac{\pi}{4}, & K_1 = K_2 &= 0, \\ A_{12} = A_{21} &= 0, & H &= \pi \end{aligned}$$

となる．従って， $\eta_3 = 0$  を得る（これは  $K_1 = K_2 = 0$  と仮定するときにも得る）．以上を用い，定理 3.1-b) の常微分方程式の固有値問題が対角化され，単独の常微分方程式に帰着される． $\{\zeta_m\}_{m=1}^{+\infty}$  を関数

$$Z(s) = (e^s + e^{-s}) \cos s - 2, \quad s > 0$$

のゼロ点とする．すると

$$\{\Lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} = \left\{ \frac{\lambda_2(3\lambda_1 + 2\lambda_2)}{4(\lambda_1 + \lambda_2)} \left( \frac{\zeta_k}{l} \right)^4 \right\}_{k=1}^{+\infty}$$

となる．更に，円柱の場合は固有値が重複していることも分かる．一方は， $\Lambda_m$  に対応する固有関数  $\chi_m(\tau)$  は

$$\begin{aligned} \chi_m(\tau) &= (e^{\zeta_m} + e^{-\zeta_m} - 2 \cos \zeta_m) \sin \left( \frac{\zeta_m}{l} \tau \right) + (2 \sin \zeta_m + e^{-\zeta_m} - e^{\zeta_m}) \cos \left( \frac{\zeta_m}{l} \tau \right) \\ &\quad + (\cos \zeta_m - \sin \zeta_m - e^{-\zeta_m}) e^{\frac{\zeta_m}{l} \tau} + (e^{\zeta_m} - \sin \zeta_m - \cos \zeta_m) e^{-\frac{\zeta_m}{l} \tau} \end{aligned}$$

となる．

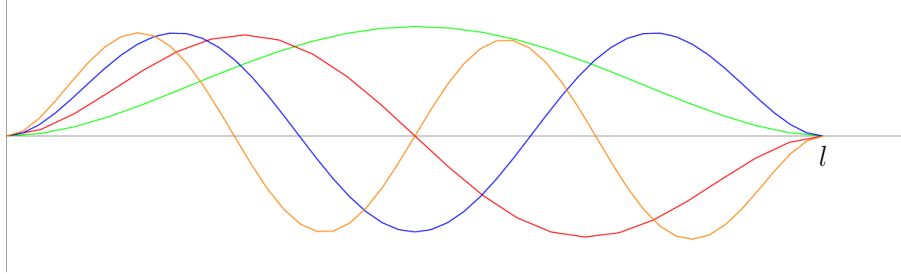


図 2:  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$  のグラフ

$\Phi_{k,\varepsilon}$  を  $\mu_k(\varepsilon)$  に対応する固有関数とする．ならば  $\tilde{\Phi}_{k,\varepsilon}(y_1, y_2, y_3) = \Phi_{k,\varepsilon}(\varepsilon y_1, \varepsilon y_2, y_3)$  とおくと

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\Phi}_{k,\varepsilon} = \tilde{\Phi}_k \quad \text{in } L^2(F(S), \mathbb{R}^3)$$

が成り立つ．ここで

$$\tilde{\Phi}_k(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} \hat{\Phi}_{\frac{k+1}{2}}(y_1, y_2, y_3) & \text{if } k \text{ 奇数} \\ \hat{\Phi}_{\frac{k}{2}}(y_1, y_2, y_3) & \text{if } k \text{ 偶数} \end{cases}$$

であり， $\hat{\Phi}_m$  は

$$\hat{\Phi}_m(y_1, y_2, y_3) = \left( c_1 \chi_m(y_3), c_2 \chi_m(y_3), -c_1 y_1 \frac{d\chi_m}{dy_3}(y_3) - c_2 y_2 \frac{d\chi_m}{dy_3}(y_3) \right) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

を指す．

## 5. 証明の概略

本節で証明の方針を述べる.

- 変数変換を行い  $\varepsilon$  に依存しない領域  $S$  で計算をする.
- Rayleigh 商や Max-Min 法を用い固有値  $\mu_k(\varepsilon)$  の評価を得, オーダー  $O(\varepsilon^2)$  を示す.
- Korn の不等式を使用し, 固有関数  $\Phi_{k,\varepsilon}$  が  $L^2$  の意味で有界であることを証明する.
- 固有値問題 (3) の弱形式に吟味したテスト関数を代入し,  $\varepsilon \rightarrow 0$  とすれば, 極限方程式が分かる.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_k(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \tilde{\Lambda}_k$  と書くと,  $\tilde{\Lambda}_k \geq \Lambda_k$  を得る.
- また Rayleigh 商や Max-Min 法を使い評価  $\tilde{\Lambda}_k \leq \Lambda_k$  を示すことができる. 従って  $\tilde{\Lambda}_k = \Lambda_k$  となり証明が終わる.

## 参考文献

- [1] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity Volumes I, II and III*, North-Holland, 1988, 1997, 2000
- [2] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, *Homogenization of Reticulated Structures*, Springer-Verlag, 1999
- [3] G. Duvaut, J.L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, 1976, translated by C.W. John
- [4] D.E. Edmunds, W.D. Evans, *Spectral Theory and Differential Operators*, Oxford University Press, 1987
- [5] V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskij, *Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singularly Perturbed Domains Volumes I and II*, Birkhäuser, 2000
- [6] 橋本浩平, 細い弾性体の固有振動, 北海道大学修士論文, 2009